ROUMANIE

Lycée Louis-le-Grand, test pour l'entrée en classe préparatoire MPSI, session 2010

Durée du test : 4 heures

Les exercices ci-dessous peuvent être abordés dans un ordre quelconque. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice 1 Donner le nombre de diviseurs strictement positifs de 2010.

Exercice 2 Montrer que $\sqrt[3]{5}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 3 Soit x et y des réels tels que $0 < x \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Montrer que

$$\frac{\sin y}{\sin x} \leqslant \frac{y}{x}.$$

Exercice 4 Soit ABC un triangle non aplati du plan. On note I le point d'intersection des bissectrices intérieures issues de B et C, et J le point d'intersection des bissectrices extérieures issues de B et C.

On note I' le projeté orthogonal de I sur (BC) et J' le projeté orthogonal de J sur (BC).

Montrer que le milieu de $I'J'$ est égal au milieu de BC.

Exercice 5 Soit X un ensemble à n éléments. Donner le nombre de couples (A, B) de parties de X telles que $A \subset B$.

Exercice 6 On pose $f_n(x) = x^n + x - 1$ lorsque $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique racine dans l'intervalle $]0, 1[$. On note x_n cette racine.

b. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante.

Exercice 7 Un groupe de personnes est soumis à un test virologique. On suppose que la probabilité pour que le test soit positif dans le cas d'une contamination par le virus est de 99%. On suppose que la probabilité de fausse alerte, c'est-à-dire que le test soit positif en l'absence de contamination, est de 5%. La fréquence d'infection du groupe est de 0,01%. Quelle est la probabilité pour qu'une personne obtenant un test positif soit contaminée ? On donnera le résultat numérique avec une seule décimale.

Exercice 8 Donner une primitive de $\frac{x^3}{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}}$ sur $[0,+\infty[$.

Exercice 9 On pose $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et l'on définit par récurrence la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ grâce à la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant 0 \ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

a. Montrer soigneusement que, pour tout $n \geqslant 0$, F_n est un entier.
b. Montrer que, pour tout $k \geqslant 0$, F_{3k} est un entier pair.
c. Montrer que, si $m \in \mathbb{N}^*$ et si m divise n, alors F_m divise F_n.

Exercice 10 Déterminer tous les entiers relatifs x et y tels que $x^3 - y^3 = 19$.

Exercice 11 Soit r un réel de $]0, \frac{\pi}{2}[$. On pose $f_n(t) = \frac{(r^2-t^2)^n}{2^n n!}$ et $I_n = \int_0^r f_n(t)\cos t\,dt$. Ainsi, $f_0(t) = 1$, $f_1(t) = \frac{r^2-t^2}{2}$.
a. Calculer I_0 et I_1.
b. Montrer que, pour $n \geqslant 2$, $f_n''(t) = -(2n-1)f_{n-1}(t) + r^2 f_{n-2}(t)$.
c. En déduire que $I_n = (2n-1)I_{n-1} - r^2 I_{n-2}$.
d. Dans cette question, on suppose par l'absurde qu'il existe N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $I_n = 0$. Aboutir à une contradiction à l'aide des questions **a** et **c**.
On suppose dans la suite de cet exercice que r est un rationnel que l'on écrit $r = \frac{a}{b}$, avec a et b entiers naturels.
e. Montrer que, si $A > 0$, alors $\frac{A^n}{n!} \to 0$. En déduire que $b^n I_n \to 0$.
f. Montrer qu'il existe des entiers relatifs u_n et v_n tels que $b^n I_n = u_n \cos r + v_n \sin r$.
g. On suppose par l'absurde que $\tan r$ est rationnel, et qu'il s'écrit donc $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers. Vérifier que $b^n q \frac{I_n}{\cos r} \in \mathbb{Z}$. En déduire une contradiction.
h. Montrer que π est irrationnel.